

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Окружно такмичење из математике
ученика основних школа

28.03.2015.

V разред

1. Збир два броја је 5092,9879. Када се једном од та два броја помери децимална запета за три места удесно добија се други од тих бројева. Који су то бројеви?
2. Замени звезде одговарајућим цифрама (не обавезно једнаким) тако да је количник разломка $\frac{4*5*}{45}$ и двоцифреног броја $\overline{**}$ једнак 2. Колико решења има задатак?
3. Данијела је другарици рекла следеће: „Број мог телефона се састоји од 6 различитих цифара које су у опадајућем редоследу, дељив је са 30, а збир цифара је већи од 30.“ Да ли Данијелина другарица може да зна из ових података њен број телефона?
4. Квадар са целобројним дужинама ивица има запремину 2015. Обојен је споља црвено, а затим исечен на јединичне коцке. Ако је при томе добијено тачно осам коцкица са тачно три обојене стране, одреди број коцкица које немају ниједну обојену страну.
5. Нацртај слику коцке и код сваког темена коцке упиши један од бројева 1, 2, ..., 7, 8 тако да је збир бројева на свакој страни коцке једнак. Бројеви се не могу понављати. Одреди бар једно решење.

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.

Израда задатака траје 150 минута.

Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

V РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа.
Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

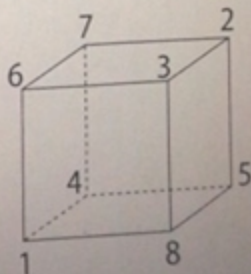
1. Означимо мањи број са x . Ако се овом броју децимална запета помери три места удесно добијамо 1000 пута већи број, па је други број $1000x$ (5 поена). Дакле, $x + 1000x = 5092,9879$, тј. $1001x = 5092,9879$ (8 поена), одакле је $x = 5,0879$ (5 поена). Тражени бројеви су 5,0879 и 5087,9 (2 поена).

2. (МЛ 48/5) Из услова задатка је $\frac{4*5*}{45} : ** = 2$, односно $4*5* = 2 \cdot 45 \cdot **$, тј. $4*5* = 90 \cdot **$ (5 поена). Број $4*5*$ треба да је дељив са 90, односно са 9 и 10. Дакле, цифра јединица је 0, а цифра стотина 0 или 9 (5 поена). Задатак има два решења, $\frac{4050}{45} : 45 = 2$ и $\frac{4950}{45} : 55 = 2$ (свако решење по 5 поена).

3. Број телефона је дељив са 30, па је дељив и са 10 и са 3. Дакле, последња цифра телефонског броја је 0 (5 поена). Највећи могући збир преосталих цифара је $9 + 8 + 7 + 6 + 5 = 35$, па збир цифара броја телефона мора бити 33 (8 поена). Како све цифре морају бити различите, постоје две могућности за тражени збир цифара: $9 + 8 + 7 + 6 + 3 + 0 = 9 + 8 + 7 + 5 + 4 + 0 = 33$ (7 поена). Дакле, на основу датих података Данијелина другарица не може знати њен број телефона.

4. Како постоји тачно осам коцкица са тачно три обојене стране, посматрани квадар има дужине ивица 5, 13 и 31 (10 поена). Ово објашњење је неопходно да би се искључила могућност да квадар има ивицу дужине 1.). Тада је број коцкица које немају ниједну обојену страну $3 \cdot 11 \cdot 29 = 957$ (10 поена).

5. Сваки број се појављује у збировима на три стране, па је укупан збир бројева на свих шест страна $3 \cdot (1 + 2 + \dots + 8) = 108$, а на једној страни $108 : 6 = 18$ (10 поена). Једно решење дато је на слици (10 поена). Признавати и свако друго решење без претходног поступка.).



Министарство просвете, науке и технолошког развоја
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Окружно такмичење из математике
ученика основних школа
28.03.2015.

VI разред

1. Израчунај вредност израза $-a - \frac{1}{b - \frac{1}{c}}$ ако је $a = 0,333... = 0,\bar{3}$;
 $b = 0,444... = 0,\bar{4}$; $c = 0,666... = 0,\bar{6}$.
2. Производ три узастопна цела броја је једнак осмострукој вредности њиховог збира. Одреди те бројеве.
3. Конструирај троугао ABC ако је $a = 6\text{cm}$, $\alpha = 60^\circ$, $h_c = 4\text{cm}$.
4. У равни је дато 10 правих. При томе међу било које четири од датих правих постоје две паралелне. Докажи да међу 10 датих правих постоје четири паралелне.
5. У троуглу ABC је $\angle A = 120^\circ$, $\angle B = 20^\circ$, а симетрала угла A (до пресека са наспрамном страницом) је дужине 2cm . Одреди разлику дужина страница BC и AB .

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.

Израда задатака траје 150 минута.

Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

VI РАЗРЕД

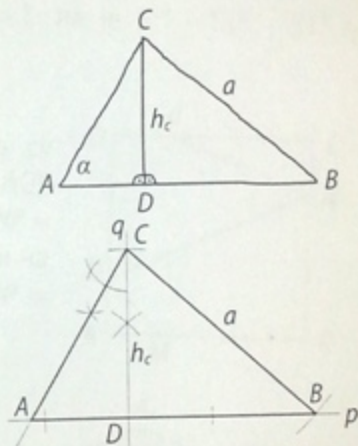
Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа. Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

1. (МЛ 47/3) $a = \frac{1}{3}$ (3 поена), $b = \frac{4}{9}$ (3 поена) и $c = \frac{2}{3}$ (3 поена). Сада имамо:

$$-a - \frac{1}{b - \frac{1}{c}} = -\frac{1}{3} - \frac{1}{\frac{4}{9} - \frac{1}{\frac{2}{3}}} = -\frac{1}{3} - \frac{1}{\frac{4}{9} - \frac{3}{2}} = -\frac{1}{3} - \frac{1}{\frac{8 - 27}{18}} = -\frac{1}{3} - \frac{18}{19} = -\frac{19 + 54}{57} = -\frac{73}{57} \quad (11 \text{ поена}).$$

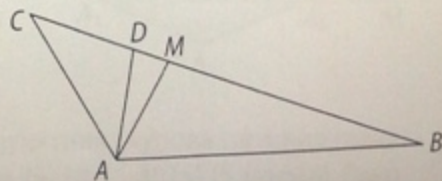
2. Нека су то бројеви $n - 1, n, n + 1$ ($n \in \mathbb{Z}$). Тада важи $(n - 1)n(n + 1) = 8 \cdot 3n = 24n$ (5 поена). Једно очигледно решење ове једначине је $n = 0$. Остала решења задовољавају услов $(n - 1)(n + 1) = 24 = 4 \cdot 6 = -6 \cdot (-4)$, одакле следи $n = 5$ или $n = -5$. Тражени бројеви су: $\{-6, -5, -4\}, \{-1, 0, 1\}, \{4, 5, 6\}$ (свако решење по 5 поена).

3. Нека је D подножје нормале из темена C (слика горе). Троугао ADC је правоугли, позната је катета и унутрашњи углови, па га можемо конструисати (4 поена). Троугао BDC је такође правоугли, познати су нам катета и хипотенуза, па и њега можемо конструисати (4 поена). Конструкција (слика доле) (није битан редослед конструкција троуглова ADC и BDC): на правој p одаберемо произвољну тачку D и у њој конструишемо нормалу q на праву p ; на праву q нанесемо дужину h_c и добијамо тачку C ; из темена C конструишемо угао од 30° ; у пресеку крака угла и праве p добијамо тачку A ; из темена C опишемо кружницу полупречника a ; у пресеку кружнице и праве p добијамо теме B , при чему је $A-D-B$ (12 поена).



4. Посматрајмо подскупоове међусобно паралелних правих у скупу датих правих. Број таквих подскупова је највише 3, јер ако би постојала бар 4, онда би у скупу датих правих постојале 4 праве међу којима нема паралелних, супротно претпоставци задатка (10 поена). Како је број подскупова највише 3, неком од њих морају припадати бар 4 праве (Дирихлеов принцип) (10 поена).

5. Нека је D тачка странице BC таква да је $BD = AB$. Троугло ABD је једнакокрак са угловима $20^\circ, 80^\circ, 80^\circ$ (6 поена). Углови троугла ADC су $40^\circ, 40^\circ, 100^\circ$, он је једнакокрак и $CD = AD$ (6 поена). Углови троугла AMD су $80^\circ, 80^\circ, 20^\circ$, па је једнакокрак и $AD = AM$ (6 поена). Зато је $CD = AD = AM = 2\text{cm}$, па је тражена разлика $BC - AB = BC - BD = CD = 2\text{cm}$ (2 поена).



Министарство просвете, науке и технолошког развоја
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Окружно такмичење из математике
ученика основних школа
28.03.2015.

VII разред

1. Између једног природног броја и двоструке вредности његовог квадрата има 11174 природна броја. Одреди тај природан број.
2. Шта је веће: $5^{13} \cdot 13^{31} \cdot 31^5$ или $13^5 \cdot 31^{13} \cdot 5^{31}$?
3. Нека су M, N, P, Q редом тачке на страницама AB, BC, CD, DA квадрата $ABCD$ такве да је $AM = NC = PD = QA$. Докажи да је $\angle PNC = \angle NQM$.
4. Дат је правилан осмоугао $A_1A_2...A_8$ чији је полупречник описаног круга бсм и правоугаоник A_1MNA_7 (у коме лежи теме A_4 осмоугла) тако да осмоугао и правоугоник имају једнаке површине. Израчунај површину дела правоугаоника који је изван осмоугла.
5. Из скупа $\{1, 2, ..., 2014, 2015\}$ одабрано је 1011 бројева. Докажи да међу изабраним бројевима постоје два која се разликују за 5.

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.

Израда задатака траје 150 минута.

Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

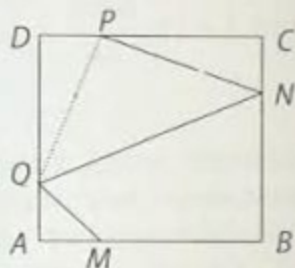
VII РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа.
Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

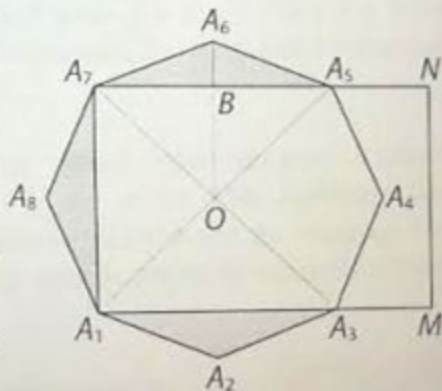
1. (МЛ 49/2) Између природних бројева a и b налази се $a - b - 1$ природних бројева. Ако посматрани природни број обележимо са x , тада је $2x^2 - x - 1 = 11174$ (8 поена), па је $x(2x - 1) = 11175$ (4 поена). Како је $11175 = 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 149$, то је $x = 75$ и $2x - 1 = 149$, па је тражени број 75 (8 поена).

2. Како је $\frac{5^{13} \cdot 13^{31} \cdot 31^5}{13^5 \cdot 31^{13} \cdot 5^{31}} = \frac{13^{26}}{31^8 \cdot 5^{18}}$ (4 поена) $= \frac{13^{16} \cdot 13^{10}}{31^8 \cdot 5^8 \cdot 5^{10}} = \left(\frac{169}{155}\right)^8 \cdot \left(\frac{13}{5}\right)^{10}$ (12 поена) $\frac{169}{155} > 1$ и $\frac{13}{5} > 1$, то је $\frac{5^{13} \cdot 13^{31} \cdot 31^5}{13^5 \cdot 31^{13} \cdot 5^{31}} > 1$, па је $5^{13} \cdot 13^{31} \cdot 31^5 > 13^5 \cdot 31^{13} \cdot 5^{31}$ (4 поена).

3. Троуглови CNP и DPQ су подударни јер су правоугли и $CN = DP$, $CP = DQ$ ($CD - DP = DA - AQ$), па је $NP = PQ$ и заклапају прав угао. Сада је $\angle QNP = 45^\circ = \angle AQM$ (8 поена). $\angle CNQ$ и $\angle NQA$ су углови на трансверзали и једнаки (8 поена), па је $\angle CNP = \angle CNQ - 45^\circ = \angle NQA - 45^\circ = \angle NQM$ (4 поена).



4. Површина правоугаоника изван осмоугла једнака је збиру површина три подударна осенчена троугла (због једнакости површина) (8 поена). Одредимо површину једног осенченог троугла. Како је четвороугао $A_1A_3A_5A_7$ квадрат и $OA_7 = OA_6 = OA_5 = 6\text{cm}$, то је $A_5A_7 = 6\sqrt{2}\text{cm}$ (4 поена), $OB = 3\sqrt{2}\text{cm}$, $A_6B = 3 \cdot (2 - \sqrt{2})\text{cm}$ (4 поена) па је тражена површина $54 \cdot (\sqrt{2} - 1)\text{cm}^2$ (4 поена).



5. Скуп $\{1, 2, \dots, 2014, 2015\}$ је унија пет дисјунктних скупова од којих сваки има 403 елемента: $A_1 = \{1, 6, \dots, 2011\}$, ..., $A_5 = \{5, 10, \dots, 2015\}$ (5 поена). Како је $1011 = 5 \cdot 202 + 1$, на основу Дирихлеовог принципа постоји скуп A_i , $1 \leq i \leq 5$, из ког су одабрана бар 203 елемента (10 поена). То значи да у скупу A_i постоје бар два суседна елемента која су одабрана, а они се разликују за 5 (5 поена).

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Окружно такмичење из математике ученика основних школа
28.03.2015.

VIII разред

1. Тачка A је пресек графика функције $y = \frac{3}{4}x + 12$ са x -осом, а тачка B је пресек графика функције $y = -\frac{4}{3}x + 12$ са x -осом. Тачка C је пресек та два графика.
а) Докажи да је троугао ABC правоугли;
б) Израчунај обим и површину тог троугла.
2. Свака страна коцке подељена је на 9 једнаких квадрата. Да ли је могуће у сваки квадрат уписати неки цео број тако да за сваки квадрат важи: збир пет бројева – броја уписаног у тај квадрат и четири броја уписаних у њему суседне квадрате – једнак је 17? (Два квадрата су суседна ако имају заједничку ивицу, укључујући и случај када ти квадрати не припадају истој страни коцке.)
3. У паралелограму $ABCD$ кружница описана око троугла BCD сече дијагоналу AC по други пут у тачки M . Ако је однос површина троугла BDM и паралелограма 1 : 18, одреди однос дужина дијагонала паралелограма.
4. Докажи да је број $2015^{12} + 2^{10}$ сложен.
5. Дат је правилни тетраедар $ABCD$ чија ивица има дужину a . Раван δ садржи тачку D и пресеца ивице AB и BC тако да је пресек тетраедра и равни δ троугао. Докажи да је обим пресечног троугла већи од $2a$.

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.

Израда задатака траје 150 минута.

Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

VIII РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа.
Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

1. Координате пресечних тачака су $A(-16, 0)$, $B(9, 0)$, $C(0, 12)$ (**5 поена**). Дужине страница троугла су $AB = 25\text{cm}$, $AC = 20\text{cm}$, $BC = 15\text{cm}$ (**5 поена**).

а) Како је $25^2 = 20^2 + 15^2$, троугао ABC је правоугли (**5 поена**). Признати и ако ученици без израчунавања дужина страница искористе познати услов нормалности две праве у координатном систему.).

б) $O = 60\text{cm}$, $P = 150\text{cm}^2$ (**5 поена**).

2. Не. Сваком квадрату суседна су 4 квадрата који с њим образују „крст“. Сваки квадрат укључен је у 5 крстова. Ако је збир бројева у сваком крсту 17, онда је петоструки збир свих написаних бројева $17 \cdot 54$, што је контрадикција, јер тај број није дељив са 5 (**20 поена**).

3. $P_{ABCD} : P_{BDM} = 18 : 1$. Како је $P_{ABCD} : P_{ABD} = 2 : 1$, то је $P_{ABD} : P_{BDM} = 9 : 1$, а одавде је $OA : OM = 9 : 1$ (**5 поена**). Такође, $\angle DBM = \angle DCM$ (периферијски над истом тетивом) и $\angle BAO = \angle DCM$ (са паралелним крацима) па је $\angle OBM = \angle BAO$ (**5 поена**) и троуглови OMB и OBA су слични (**5 поена**). Сада је

$OM : OB = OB : OA$, па је $OB^2 = \frac{1}{9} OA^2$, тј. $OB = \frac{1}{3} OA$. Дакле, $AC : BD = 3 : 1$ (**5 поена**).

4. $2015^{12} + 2^{10} = (2015^6 + 2^5)^2 - 2 \cdot 2^5 \cdot 2015^6$ (**8 поена**) $= (2015^6 + 2^5)^2 - (2^3 \cdot 2015^3)^2 = (2015^6 + 2^5 - 2^3 \cdot 2015^3)(2015^6 + 2^5 + 2^3 \cdot 2015^3)$. Дакле, како су оба чиниоца већа од 1, дати број је сложен (**12 поена**).

5. (МЛ 47/4) Посматрајмо правилни тетраедар $ABCD$. Нека раван δ пресеца ивице AB и BC редом у тачкама M и N (слика лево). Ако развијемо мрежу тетраедра (слика десно) онда је јасно да је обим пресечног троугла $O = DM + MN + DN = D_2M + MN + ND_3 > D_2D_3 = 2a$, јер је дуж D_2D_3 најкраће растојање између тачака D_2 и D_3 (**20 поена**).

